Chapitre 33

Déterminants

Plan du chapitre

1 **Application n-linéaire** **2**

1.1 Forme bilinéaire (ou 2-linéaire) 2

1.2 Forme n-linéaire 4

1.3 Forme linéaire alternée 5

2 **Introduction au déterminant** **7**

2.1 Expression d'une forme n-linéaire alternée sur un e.v. de dimension n 7

2.2 Déterminant d'une matrice, notation du déterminant 9

2.3 Calcul du déterminant pour des tailles $n \leq 3$ 11

3 **Propriétés théoriques du déterminant** **11**

3.1 Montrer qu'une famille est une base grâce au déterminant 12

3.2 Propriétés du déterminant sur les colonnes d'une matrice 13

3.3 Propriétés du déterminant sur les lignes d'une matrice 15

4 **Calcul pratique du déterminant** **15**

4.1 Opérations élémentaires 15

4.2 Développement selon une ligne / colonne (cas simple) 17

4.3 Déterminant d'une matrice triangulaire 18

4.4 Développement selon une ligne / colonne (cas général) 19

5 **Déterminant d'un endomorphisme** **21**

5.1 Définition 21

5.2 Propriétés algébriques du déterminant 22

5.3 Version matricielle des propriétés précédentes 24

6 **Comatrice et formule d'inversion matricielle** **24**

7 **Formules de Cramer** **25**

8 **Mineur extrait et rang** **27**

9 **Méthodes pour les exercices** **28**

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E et F désignent deux $\mathbb{K}$-e.v.

n et p sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

1 Application n-linéaire

1.1 Forme bilinéaire (ou 2-linéaire)

Définition 33.1 – Application bilinéaire

Soit $f : E \times E \to F$.

- On dit que f est linéaire en sa première variable si pour tout v_0 dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} f(\cdot, v_0) : E &\to F \\ u &\mapsto f(u, v_0) \end{aligned}$$

- On dit que f est linéaire en sa seconde variable si pour tout u_0 dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} f(u_0, \cdot) : E &\to F \\ v &\mapsto f(u_0, v) \end{aligned}$$

Enfin, on dit que f est une application bilinéaire si f est linéaire par rapport à chacune de ses 2 variables. Si de plus $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme bilinéaire.

Attention, les notations "$f(\cdot, v_0)$" et "$f(u_0, \cdot)$" ne sont en rien officielles et on ne les écrira pas sur une copie.

Exemple 1. L'application "produit scalaire" $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' + yy' + zz'$$

est une forme bilinéaire.

Définition 33.2

Soit $f : E \times E \to F$ une application quelconque. On dit que f est <u>symétrique</u> si :

$$\forall x, y \in E \qquad f(y,x) = f(x,y)$$

Théorème 33.3

Si $f : E \times E \to F$ est une application symétrique et linéaire en une de ses variables, alors f est linéaire en son autre variable, donc f est bilinéaire.

Démonstration. Supposons par exemple que f est linéaire en sa première variable. Montrons que f est linéaire en sa seconde variable.

□

Exemple 2.

- L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M,N) = MN$ est une application bilinéaire. Est-elle symétrique ?
- L'application $\varphi : \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 fg$ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
- L'application $\psi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(f,g) = f \circ g$ est une application bilinéaire (non symétrique en général).
  - Attention, cela n'est pas vrai si l'application φ est définie sur $\mathcal{F}(F,G) \times \mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(E,G)$: elle serait encore linéaire selon sa .... variable mais ne serait plus linéaire en sa .... variable.

Théorème 33.4 – Il en faut peu pour connaitre une application bilinéaire

On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $f : E \times E \to F$ une application bilinéaire. Pour tous vecteurs $u, v \in E$, si on pose

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

alors :

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(e_i, e_j)$$

En particulier, il suffit de connaitre / définir les valeurs de $f(e_i, e_j)$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ pour totalement connaitre / définir l'application f.

Démonstration.

□

1.2 Forme n-linéaire

On rappelle que $n \in \mathbb{N}^*$ par hypothèse, et que $E^n := \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$.

n n'est pas nécessairement la dimension de E (qui peut être de dimension infinie d'ailleurs !).

Définition 33.5 – Application n-linéaire

On dit que $f : E^n \to F$ est une <u>application n-linéaire</u> (sur E) si f est linéaire par rapport à chacune de ses n variables, c'est-à-dire :

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour toute famille $(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_n) \in E^{n-1}$ l'application suivante est linéaire :

$$f(u_1, \cdots, u_{i-1}, \quad \cdot \quad, u_{i+1}, \cdots, u_n) : \begin{array}{l} E \to F \\ v \mapsto f(u_1, \cdots, u_{i-1}, \quad v \quad, u_{i+1}, \cdots, u_n) \end{array}$$

Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une <u>forme n-linéaire</u>.

Le n de cette définition peut être remplacé par tout entier naturel non nul : on peut ainsi parler d'application 3-linéaire, 4-linéaire, m-linéaire ou p-linéaire (du moment que m et p ont été introduits).

Exemple 3.
- ◦ Les applications 1-linéaires sont exactement les applications linéaires.
- ◦ Les applications 2-linéaires sont exactement les applications bilinéaires.

Exemple 4. L'application $\varphi : \mathscr{C}^0(\mathbb{R})^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g, h) = \displaystyle\int_0^1 fgh$ est une forme 3-linéaire.

Exemple 5. L'application $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{K})^{2026} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(M_1, \cdots, M_{2026}) = M_1 \cdots M_{2026}$ est une application 2026-linéaire.

1.3 Forme linéaire alternée

Définition 33.6 – Forme linéaire alternée

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. On dit que f est alternée si elle s'annule lorsque deux de ses arguments sont égaux.

Autrement dit, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$ et tous vecteurs $v, u_1, \cdots, u_n \in E$, on a

$$f(u_1, \cdots u_{i-1}, \quad v \quad, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, \quad v \quad, u_{j+1}, \cdots, u_n) = 0$$

(les vecteurs u_i et u_j n'ont pas été utilisés)

Théorème 33.7

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$.

- Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille *liée* de vecteurs de E, alors $f(u_1, \cdots, u_n) = 0$.
- La valeur de $f(u_1, \cdots, u_n)$ ne change pas si on ajoute à un des vecteurs u_i une combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K} \qquad f\left(u_1, \cdots, u_{n-1}, \quad u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i\right) = f(u_1, \cdots, u_n)$$

Démonstration.

□

Définition 33.8 – Forme n-linéaire antisymétrique

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. On dit que f est antisymétrique si, lorsqu'on échange la position de deux des ses arguments, l'expression change de signe.

Autrement dit, pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$, on a :

$$f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots, u_n) \quad = \quad -f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots, u_n)$$

Théorème 33.9

Soit f une forme n-linéaire sur E antisymétrique, et soit une permutation $\sigma \in S_n$. Alors pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, on a

$$f(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \cdots, u_n)$$

Démonstration.

□

Théorème 33.10

Une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Démonstration.

$\square$

2 Introduction au déterminant

Hypothèse

Pour le reste du chapitre, E est un espace de dimension **finie** égale à n.

2.1 Expression d'une forme n-linéaire alternée sur un e.v. de dimension n

On a vu avec le Théorème 33.4 comment s'exprime $f(u,v)$ avec f une application bilinéaire définie sur E de dimension finie. On va faire la même étude pour une forme n-linéaire alternée définie sur un e.v. E de dimension n. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E et $f:E^n\to\mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Pour simplifier, on fera la présentation dans le cas $n=3$.
Soit (u_1,u_2,u_3) une famille de 3 vecteurs de E dont on pose leurs coordonnées selon la base $\mathcal{B}$:

$$u_j=a_{1j}e_1+a_{2j}e_2+a_{3j}e_3 \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\end{pmatrix}$$

Calculons $f(u_1,u_2,u_3)$ en fonction des coordonnées a_{ij} :

$$f(u_1,u_2,u_3)=f\left(a_{11}e_1+a_{21}e_2+a_{31}e_3,\ a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3,\ a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3\right)$$

On peut ensuite développer chaque somme par linéarité comme on l'a fait pour une application bilinéaire. On se retrouverait alors avec 3^3 termes :

$$\begin{aligned}
& f(u_1,u_2,u_3) \\
=& \underbrace{a_{11}a_{12}a_{13}f(e_1,e_1,e_1)}_{\substack{\text{on prend les indices } (1,1,1) \\ \text{dans les composantes}}} + \underbrace{a_{11}a_{12}a_{23}f(e_1,e_1,e_2)}_{\substack{\text{on prend les indices } (1,1,2) \\ \text{dans les composantes}}} + \dots + \underbrace{a_{31}a_{32}a_{33}f(e_3,e_3,e_3)}_{\substack{\text{on prend les indices } (3,3,3) \\ \text{dans les composantes}}} \\
=& \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{i1}a_{j2}a_{k3}f(e_i,e_j,e_k) \\
=& \sum_{(i,j,k)\in[\![1,3]\!]} a_{i1}a_{j2}a_{k3}f(e_i,e_j,e_k)
\end{aligned}$$

Cependant, comme f est alternée, les termes ci-dessus s'annulent dès que deux indices parmi i, j, k sont égaux. Ainsi, on en déduit que la somme peut être restreinte aux triplets (i, j, k) avec i, j, k distincts, c'est-à-dire aux triplets $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ obtenus lorsque la permutation σ parcourt S_3. On peut ainsi écrire :

Enfin, comme f est antisymétrique (puisqu'elle est alternée), on a $f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma)f(e_1,e_2,e_3)$ par le Théorème 33.9, donc :

On en déduit en particulier qu'il en faut très peu pour connaitre / définir une forme 3-linéaire alternée : la valeur de $f(e_1,e_2,e_3)$ suffit ! Plus généralement, avec une forme n-linéaire alternée sur un e.v. de dimension n, on a le résultat suivant :

Théorème 33.11

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit f une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $u_1, \cdots, u_n$ des vecteurs de E. Alors :

$$f(u_1,\cdots,u_n) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)\,1}\cdots a_{\sigma(n)\,n}\right) f(e_1,\cdots,e_n)$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a noté $(a_{1\,j}, \cdots, a_{n\,j})$ les coordonnées de u_j selon la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

Corollaire 33.12

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

- Il existe une unique forme n-linéaire alternée $f : E^n \to \mathbb{K}$ telle que $f(e_1, \cdots, e_n) = 1$. On la note $\det_{\mathcal{B}}$, de sorte que :

  où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a noté $(a_{1\,j}, \cdots, a_{n\,j})$ les coordonnées de u_j selon la base $(e_1, \cdots, e_n)$.
- De plus, toute autre forme n-linéaire alternée f sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$: $\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$

La forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

□

Remarque. On note parfois $\Lambda_n^*(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. On peut montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$. Le Corollaire 33.12 dit en substance que $\Lambda_n^*(E)$ est un s.e.v. de dimension 1, et qu'on peut prendre pour base, la famille à un seul élément $(\det_{\mathcal{B}})$:

- La première assertion montre que $\det_{\mathcal{B}} \neq 0$, donc la famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est libre.
- La deuxième assertion montre que la famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est génératrice de $\Lambda_n^*(E)$.

2.2 Déterminant d'une matrice, notation du déterminant

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u_1, \cdots, u_n \in E$. On a vu que

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}$$

avec a_{ij} la coordonnée du vecteur u_j selon e_i. Cette expression n'est pas très commode à exploiter, notamment car elle ne dépend pas de $u_1, \cdots, u_n$ directement, mais de leurs coordonnées $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ selon la base $\mathcal{B}$. Cependant, les coordonnées (a_{ij}) interviennent directement dans la matrice suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On constate qu'il est beaucoup plus facile de définir le déterminant de $(u_1, \cdots, u_n)$ à partir de cette matrice. Cela conduit plus généralement à la définition suivante :

Définition 33.13

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée**. On définit le déterminant de A, noté $\det A$, par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}$$

En particulier, pour tous vecteurs $u_1, \cdots, u_n \in E$ et toute base $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)\right)$$

Avec les barres, $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ est un élément de $\mathbb{K}$. Sans les barres, $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice.

Exemple 6. On se place dans $E = \mathbb{K}_2[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $P_1 = \alpha X^2 + 1$, $P_2 = X + \alpha$ et $P_3 = X^2 + \alpha X$. Écrire le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de E.

Remarque. En particulier, si $E = \mathbb{K}^n$ et si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $u_j \overset{\text{id.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_j)$: la colonne j du déterminant $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, \cdots, u_n)$ correspond au vecteur u_j reporté en colonne.

Exemple 7. Écrire le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ selon la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.

2.3 Calcul du déterminant pour des tailles $n \leq 3$

Cas $n=1$. On a $S_1 = \{\mathrm{id}\}$, donc $\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1)\,1} = a_{11}$

Cas $n=2$. On a $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$ avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1)\,1} a_{\mathrm{id}(2)\,2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)\,1} a_{\tau(2)\,2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

On retiendra donc la formule (à savoir par cœur !) :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \qquad\qquad}$$

Exemple 8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$

Cas $n=3$. Lorsque $n=3$, la définition du déterminant ($\sum\limits_{\sigma \in S_n} (\cdots)$) donne une expression à 6 termes, car $\mathrm{card}(S_3) = 3! = 6$. En pratique, on retiendra la règle de calcul suivante, appelée <u>règle de Sarrus</u> :

Exemple 9. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$

La règle de Sarrus ne se généralise pas à des tailles $n \geq 4$.

Le déterminant d'une matrice A n'a un sens que si A est une matrice **carrée**. De même, le déterminant de n vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ de E n'a de sens que si $\dim E = n$ (un vecteur par dimension).

3 Propriétés théoriques du déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes : $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$. Alors en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$\boxed{\det A = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, C_2, \cdots, C_n)}$$

On retrouve donc un déterminant sous la forme $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$ avec $E = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c$ et $(u_1, \cdots, u_n) = (C_1, \cdots, C_n) \in E^n$.

Il faut bien distinguer le déterminant **matriciel** noté $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ et le déterminant **"n-linéaire"** noté $\det_{\mathcal{B}} : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$. Ces deux applications ne vérifient pas du tout les mêmes propriétés !

3.1 Montrer qu'une famille est une base grâce au déterminant

Dans cette section, on va montrer une propriété **très utile** du déterminant n-linéaire $\det_{\mathcal{B}}$.

Théorème 33.14

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

- $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E.
- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = 1$, ou encore $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du Corollaire 33.12. □

Exemple 10. Le déterminant de la matrice I_n vaut 1.

Théorème 33.15

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\det_{\mathcal{B}'}$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Plus précisément :

Démonstration.

On a vu que $\det_{\mathcal{B}'}$ et $\det_{\mathcal{B}}$ sont des formes n-linéaires alternées, et par le Corollaire 33.12, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. On évalue cette égalité en $\mathcal{B}$, ce qui donne

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})}_{=1} = \lambda$$

Ainsi, $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. On conclut à l'égalité voulue en évaluant en un n-uplet $(u_1, \cdots, u_n)$ quelconque de vecteurs de E.

□

Corollaire 33.16

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$$

En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \neq 0$.

Démonstration.

L'égalité du Théorème 33.15 étant vraie pour tout n-uplet $(u_1, \cdots, u_n)$ de E^n, on peut en particulier prendre $(u_1, \cdots, u_n) = \mathcal{B}'$: on a donc

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Comme $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$, on a le résultat voulu.

□

Corollaire 33.17 – Caractérisation d'une base

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E.
2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$.
3. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$.

Démonstration.

Montrons que $1 \implies 2$. Puisque $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E, on peut poser $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$, auquel cas $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = 1 \neq 0$. Montrons que $2 \implies 1$. Supposons qu'il existe $\mathcal{B}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, si la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ était liée, on aurait $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = 0$, ce qui serait absurde. Ainsi, $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre. Comme $\dim E = n$, on conclut que c'est une base de E.

Enfin, montrons que $2 \iff 3$. L'implication $3 \implies 2$ est claire. Réciproquement, on suppose que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Montrons que $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$. Par le 33.15, on sait que

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

Comme $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \neq 0$ par le 33.16 et que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$ par hypothèse, on a le résultat voulu.

□

Dans $\mathbb{K}^n$, en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique, on peut vérifier directement si $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, \cdots, u_n)$ est nul ou non : cela revient à calculer le déterminant de la matrice où les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont écrits en colonne.

Exemple 11. On considère la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3.2 Propriétés du déterminant sur les colonnes d'une matrice

On rappelle que (avec des notations évidentes) :

$$\det A = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

De plus $\det_{\mathcal{B}_c}$ est une forme n-linéaire alternée. En particulier,

$$\det_{\mathcal{B}_c}(\cdots,\lambda C_j+\mu C'_j,\cdots)=\lambda\det_{\mathcal{B}_c}(\cdots,C_j,\cdots)+\mu\det_{\mathcal{B}_c}(\cdots,C'_j,\cdots)$$

On en déduit l'assertion 1 du Théorème suivant :

Théorème 33.18

Avec des notations sous-entendues :

1. Pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$:

$$\begin{vmatrix} * & \lambda a_{1j}+\mu a'_{1j} & * \\ & \vdots & \\ & \lambda a_{nj}+\mu a'_{nj} & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & a_{1j} & * \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} * & a'_{1j} & * \\ & \vdots & \\ & a'_{nj} & \end{vmatrix}$$

2. Si les colonnes $C_1,\cdots,C_n$ forment une famille liée, alors $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=0.$

3. Le déterminant est inchangé lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{K}\qquad \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i C_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

4. Si on échange deux colonnes, le déterminant de A change de signe.
5. Plus généralement, une permutation des colonnes selon $\sigma\in S_n$ multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$:

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\sigma(1)} & C_{\sigma(2)} & \cdots & C_{\sigma(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Démonstration. La première assertion découle du fait que le déterminant est une forme n-linéaire. Les deuxième et troisième assertions se déduisent du fait que le déterminant est une forme alternée en utilisant le Théorème 33.7.Les quatrième et cinquième assertions sont la conséquence directe du fait que $\det_{\mathcal{B}_c}$ est une forme antisymétrique (car alternée) en invoquant le Théorème 33.9. □

Les propriétés énoncées ci-dessus ont de *nombreuses* conséquences et applications.

Exemple 12. ◦ Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\circ \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & * & \\ 0 & & \end{vmatrix} = \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots$$

3.3 Propriétés du déterminant sur les lignes d'une matrice

Théorème 33.19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det\left(A^\top\right) = \det A$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes. Alors en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$\det A = \det\left(A^\top\right) = \det_{\mathcal{B}_c} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \det_{\mathcal{B}_c}(L_1, L_2, \cdots, L_n)$$

Théorème 33.20

Les résultats du Théorème 33.18 sont encore vrais si on remplace le mot "colonne(s)" par "ligne(s)".

Exemple 13.

$$\circ \begin{vmatrix} & * & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\circ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 Calcul pratique du déterminant

4.1 Opérations élémentaires

On peut effectuer des opérations sur les lignes ou sur les colonnes pour calculer un déterminant, comme pour le calcul du rang. Cependant, contrairement au rang, la valeur du déterminant est modifiée quand on effectue une permutation ou une dilatation.

Théorème 33.21 – Opérations élémentaires

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$.

1. Transvection : une opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, ne change pas le déterminant.
2. Permutation : une opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant.
3. “Dilatation” : on peut “factoriser” par λ dans toute une colonne ou dans toute une ligne :

$$\begin{vmatrix} & & * & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ & & * & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} & & * & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & * & \end{vmatrix}$$

Démonstration. Tout découle du Théorème 33.18 pour les colonnes, et du section 3.3 pour les lignes.

1. Une transvection revient à ajouter à une colonne (ou une ligne) une combinaison linéaire des autres. L’assertion 3 du Théorème 33.18 entraine alors que le déterminant est inchangé.
2. L’assertion pour la permutation est une conséquence directe de l’assertion 3 du Théorème.
3. Enfin, la dilatation est une conséquence du fait que le déterminant est une forme n-linéaire en les colonnes (et les lignes).

□

Exemple 14. Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Le déterminant matriciel n’est pas linéaire !

$$\det(\lambda A) = \boxed{\lambda^n} \det A \qquad \det(A+B) \boxed{\neq} \det(A) + \det(B)$$

Contre-exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots$ mais $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots$

Par contre, le déterminant n-linéaire appliqué en des vecteurs (ou aux colonnes / lignes d’une matrice) est une forme n-linéaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(\cdots, \lambda C + \mu C', \cdots) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\cdots, C, \cdots) + \mu \det_{\mathcal{B}}(\cdots, C', \cdots)$$

4.2 Développement selon une ligne / colonne (cas simple)

Ces méthodes permettent de réduire la taille d'un déterminant, à savoir passer d'un déterminant de taille n à une somme de déterminants de taille $n-1$. On suppose donc dans cette partie que $n \geq 2$.

Théorème 33.22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Alors $\det A = \lambda \det A'$.

Démonstration.

On fait permuter les lignes selon le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, i.e. $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ \cdots \\ L_n \leftarrow L_1 \end{cases}$ puis de même avec les colonnes. Comme la signature de ce cycle vaut $(-1)^{n-1}$, on a :

$$\det A = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \\ \lambda & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{(-1)^{n-1} \times (-1)^{n-1}} \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda \end{vmatrix}$$

Appelons a_{ij} les coefficients de la matrice du déterminant de droite (en particulier $a_{nn} = \lambda$). On a ainsi

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}$$

Si $\sigma \in S_n$ est telle que $\sigma(n) \neq n$, alors $a_{\sigma(n)\,n} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n-1)\,n-1} a_{n\,n} \\ &= \lambda \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n-1)\,n-1} \end{aligned}$$

On affirme que

$$\det A = \lambda \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)\,1} \ldots a_{\sigma'(n-1)\,n-1}$$

En effet, si $\sigma \in S_n$ vérifie $\sigma(n) = n$, alors la permutation $\sigma|_{[\![1,n-1]\!]}$ réalise une bijection de $[\![1,n-1]\!]$ dans lui-même, i.e. $\sigma|_{[\![1,n-1]\!]} \in S_{n-1}$. Réciproquement, si $\sigma' \in S_{n-1}$, alors on peut prolonger σ' en une permutation de $[\![1,n]\!]$ en posant $\sigma'(n) = n$. Enfin, on peut vérifier que la signature est inchangée lors de la restriction / du prolongement. D'où l'affirmation ci-dessus. Or,

$$\det A' = \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)\,1} \ldots a_{\sigma'(n-1)\,n-1}$$

et donc $\det A = \lambda \det A'$.

$\square$

Comme $\det(A^\top) = \det A$, le même résultat s'applique si la première ligne est nulle sauf éventuellement le premier coefficient :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & A' & \\ * & & & \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det A = \lambda \det A'$$

On remarquera que dans les deux formules, si $\lambda = 0$, on obtient $\det A = 0$: c'est cohérent avec le fait que si une ligne ou une colonne est remplie de zéro, le déterminant est nul.

4.3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 33.23 – Déterminant d'une matrice triangulaire

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure), alors

$$\det A = A_{11} A_{22} \cdots A_{nn}$$

Ce résultat est en particulier vrai si A est diagonale : $\det A$ est alors le produit des coefficients diagonaux.

Démonstration.

$\square$

Remarque. Pour calculer un déterminant de taille 4 ou plus, on peut, par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes, se ramener à un déterminant d'une matrice triangulaire.

Exemple 15. Calculer $D = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4.4 Développement selon une ligne / colonne (cas général)

Définition 33.24 – Mineur, cofacteur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$. On note

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1 & & a_{1j} & & A_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ A_3 & & a_{nj} & & A_4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{colonne } j & \end{array}$$

avec A_1, A_2, A_3, A_4 des sous-matrices rectangulaires. On appelle mineur d'indice (i, j) le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j de A. On le note

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

On appelle cofacteur d'indice (i, j) la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Remarque. Pour retenir facilement le signe $(-1)^{i+j}$ du cofacteur, on peut remarquer que ce signe est toujours positif pour $i = j = 1$ (en haut à gauche) et qu'il alterne une fois sur deux :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Théorème 33.25 – Développement selon une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On peut développer le déterminant de A selon une ligne $i \in [\![1, n]\!]$ fixée :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

- On peut développer le déterminant de A selon une colonne $j \in [\![1, n]\!]$ fixée :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

La formule peut être retenue, mais on peut aussi comprendre le fonctionnement sur un exemple :

Exemple 16. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} d & 1 & d \\ a & b & c \\ 1 & d & 1 \end{pmatrix}$. Développer selon la deuxième ligne le déterminant de A. En déduire une CNS sur a, b, c, d pour avoir $\det A = 0$.

Remarque. L'Exemple 16 illustre l'application de la formule générale du développement selon une ligne ou colonne. Mais il ne donne pas la bonne méthode pour écrire un déterminant sous forme factorisée :

Méthode

Avant de développer selon une ligne ou une colonne, il est avantageux de faire apparaitre un grand nombre de zéros dans cette ligne ou cette colonne.
Dans le meilleur cas, cela permet d'utiliser la formule "simple" du développement selon une ligne colonne, qui permet d'écrire $\det A = \lambda \times \det A'$

Remarque. La bonne approche pour l'exemple précédent est :

Néanmoins, le développement selon une ligne ou une colonne dans le cas "compliqué" est primordial pour des calculs de déterminant par récurrence, cf exemple suivant.

Exemple 17. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant de taille n défini par :

$$D_n := \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5 Déterminant d'un endomorphisme

5.1 Définition

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) &= \det_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right) \\ &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right)\right) \\ &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) \end{aligned}$$

Théorème 33.26

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Le scalaire $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle le déterminant de f et on le note

$$\det(f) := \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

De plus, on a

$$\forall u_1, \cdots, u_n \in E \qquad \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \tag{$*$}$$

Démonstration.

On commence par la seconde assertion. On considère l'application $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \cdots, f(u_n))$$

Comme f est linéaire, on vérifie que φ est une forme n-linéaire alternée. Ainsi, il existe un unique scalaire $\lambda_{\mathcal{B}}$ tel que $\varphi = \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}$. Lorsqu'on évalue cette relation en la base $(e_1, \cdots, e_n)$, on obtient :

$$\varphi(e_1, \cdots, e_n) = \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = \lambda \times 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{B}} &= \varphi(e_1, \cdots, e_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \\ &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\lambda_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de la base choisie. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Par le même raisonnement, il existe un unique scalaire $\lambda_{\mathcal{B}'}$ tel que

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \lambda_{\mathcal{B}'} \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n)$$

Or, il existe un unique scalaire α tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \alpha \det_{\mathcal{B}}$. En multipliant $\varphi = \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}$ par α, on obtient :

$$\begin{aligned} & \alpha \det_{\mathcal{B}}(f(u_1, \cdots, u_n)) = \lambda_{\mathcal{B}} \times \alpha \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \\ \Longrightarrow\ & \det_{\mathcal{B}'}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) \end{aligned}$$

Par unicité du scalaire $\lambda_{\mathcal{B}'}$, on a donc $\lambda_{\mathcal{B}'} = \lambda_{\mathcal{B}}$, ce qui montre que le scalaire $\lambda_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de la base choisie.

□

Exemple 18. Le déterminant de l'application id_E vaut :

$$\det(\mathrm{id}_E) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)) = \det I_n = 1$$

5.2 Propriétés algébriques du déterminant

Théorème 33.27

(On suppose E de dimension n.) Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$
- $\det(f \circ g) = \det f \det g$
- f est inversible si et seulement si $\det f \neq 0$ et dans ce cas

$$\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1} = \frac{1}{\det f}$$

Remarque. L'application déterminant est ainsi un morphisme de groupes de $(GL(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Démonstration.

- Montrons la première assertion. Par définition, si on pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda f) &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda f)\right) \\
&= \det\left(\lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) \\
&= \lambda^n \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) \\
&= \lambda^n \det f
\end{aligned}$$

-

-

$\square$

5.3 Version matricielle des propriétés précédentes

Théorème 33.28

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \det B$
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Si tel est le cas, alors

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

Démonstration. On note f_A et f_B les morphismes canoniquement associés aux matrices A et B, avec $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors :

$$\det(A) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f_A)\right) = \det(f_A)$$

et les preuves découlent ensuite du Théorème 33.27. □

Remarque. Bien que $AB \neq BA$ en général, on a tout de même $\det(AB) = \det(BA)$:

$$\det(AB) = \det A \det B \underbrace{=}_{\times \text{ est commutative dans } \mathbb{K}} \det B \det A = \det(BA)$$

Il en va de même pour les endomorphismes : $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$.

Théorème 33.29

Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Démonstration.

□

6 Comatrice et formule d'inversion matricielle

Rappel : on a vu que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. De plus, on a vu la définition d'un cofacteur et d'un mineur à la Définition 33.24.

Définition 33.30 – Comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle <u>comatrice</u> de A la matrice notée $\mathrm{Com}(A)$, telle que son coefficient d'indice (i, j) soit le cofacteur de A d'indice (i, j), càd

$$[\mathrm{Com}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} \qquad = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant de } A \text{ sans la ligne } i \text{ et la colonne } j\text{)}$$

où Δ_{ij} est le mineur de A d'indice (i, j).

Exemple 19. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \dots\dots\dots\dots$$

Théorème 33.31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

Remarque. Si A est inversible, il est possible de déterminer A^{-1} par la formule ci-dessus. Toutefois cette formule nécessite de calculer tous les cofacteurs de A, ce qui est extrêmement lourd en calcul pour les grandes valeurs de n. On ne s'en sert véritablement que pour des matrices de taille 2 et pour des exercices théoriques.

Exemple 20. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si

$$\det A = ad - bc \neq 0$$

et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top =$$

7 Formules de Cramer

On considère un système linéaire sous forme matriciel de la forme $AX = B$ avec n équations et p inconnues, de sorte qu'on peut poser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

On rappelle qu'on a vu les définitions de $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Im} A$ comme étant les noyaux et images du morphisme canoniquement associé à A qu'on note f_A.
Comme $AX = B$ équivaut à $f_A(X) = B$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 33.32

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$.

- Le système $AX = B$ admet au moins une solution si et seulement si $B \in \mathrm{Im} A$.
- Le système $AX = B$ admet au plus une solution si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$.
- Le système $AX = B$ admet une unique solution si et seulement si A est inversible. Cette solution est donnée par $X = A^{-1}B$.

Définition 33.33

Un système linéaire $AX = B$ dont la matrice A est inversible est appelé un système de Cramer.

Remarque. Dans un système de Cramer, la matrice A est nécessairement carrée, ce qui entraine $n = p$ avec les notations ci-dessus. Il y a donc nécessairement autant d'équations que d'inconnues.

Dans la suite, on s'intéresse exclusivement à un système de Cramer. Pour trouver la solution $X = A^{-1}B$, il faudrait inverser A, ce qui n'est pas toujours évident. C'est pourquoi on peut utiliser les formules de Cramer pour calculer X d'une autre manière.

Pour les besoins de la propriété suivante, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $A\left[B,k\right]$ la matrice obtenue en remplaçant la colonne k de A par celle de B (notation non officielle). On a donc :

$$A\left[B,k\right] := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Enfin, on rappelle que comme A est supposée inversible, on a $\det A \neq 0$.

Théorème 33.34 – Formules de Cramer

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B \in \mathbb{K}^n$. L'unique solution du système de Cramer $AX = B$ est $X = (x_1, \cdots, x_n)$ avec :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad x_k = \frac{\det(A\left[B,k\right])}{\det A}$$

On peut ainsi calculer chaque coordonnée x_k successivement.

Démonstration.

On note $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes de A. L'égalité $AX = B$ se réécrit

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

ou encore

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1,n]\!] \qquad b_i &= x_1a_{i1} + x_2a_{i2} + \ldots + x_na_{in} \\ &= x_1\left[C_1\right]_i + x_2\left[C_2\right]_i + \ldots + x_n\left[C_n\right]_i \\ &= \left[x_1C_1 + \ldots + x_nC_n\right]_i \end{aligned}$$

D'où par arbitraire sur i, on a $B = x_1C_1 + \ldots + x_nC_n$. Ainsi, par linéarité,

$$\det\left(A\left[B,k\right]\right) = \det\left(A\left[\sum_{j=1}^{n} x_jC_j, k\right]\right) = \sum_{j=1}^{n} x_i \det\left(A\left[C_j,k\right]\right)$$

Or, si $j \neq k$, alors la colonne C_j apparait deux fois dans $A\left[C_j,k\right]$: une fois à la colonne j et une fois à la colonne k : les colonnes de $A\left[C_j,k\right]$ forment donc une famille liée et donc $\det\left(A\left[C_j,k\right]\right) = 0$. Ainsi, il ne reste que le terme pour $j = k$:

$$\det\left(A\left[B,k\right]\right) = x_k \det\left(A\left[C_k,k\right]\right) = x_k \det A \qquad \text{car } A\left[C_k,k\right] = A$$

D'où le résultat.

$\square$

Exemple 21. Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Résoudre le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

8 Mineur extrait et rang

Définition 33.35

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. On dit que B est une sous-matrice de taille r de A si la matrice B est obtenue en ne conservant que r lignes données de A et r colonnes données de A et en supprimant toutes les autres. On a donc $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

Exemple 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Donner la sous-matrice de A en ne conservant que les lignes L_1 et L_2 ainsi que C_1 et C_4 :

Idem en ne conservant que les lignes L_1, L_3 et L_5 ainsi que C_2, C_4 et C_5 :

Définition 33.36

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. On dit que Δ est un mineur de taille r de A si Δ est le déterminant d'une sous-matrice de taille r de A.

Théorème 33.37

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{rg}(A) \geq r$
- Il existe un mineur de taille r de A qui est non nul.

Théorème 33.38

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. La matrice A est de rang r si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Il existe un mineur de taille r de A qui est non nul.
2. Tous les mineurs de taille $r+1$ de A sont nuls.

On prend pour convention que si $r = \min(n, p)$, la deuxième condition n'est pas à vérifier car il n'existe pas de mineur de taille $r+1$ de A (c'est un “pour tout” sur l'ensemble vide donc l'assertion est vraie). De plus, si tous les mineurs de taille $r+1$ sont nuls, il en va de même pour les mineurs de taille $r+2$, $r+3$, etc.

Exemple 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. On pourra ensuite vérifier par un calcul de rang classique que $\mathrm{rg}(A) = 2$, et donc que tout mineur de taille 3 (ou plus) de A est nul (essayez et vous verrez !)

Exemple 24. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\mathrm{rg}(A) = n-2$. Déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

9 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \times E \to F$ est bilinéaire, on peut :

- Montrer qu'elle est linéaire en chacune de ses deux variables.
- Si f est symétrique, montrer qu'elle est linéaire en une seule de ses variables (ce qui est suffisant).

Méthode – Calcul d'un déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice A, on peut :

- Si le déterminant est de taille 3 ou moins, utiliser les formules classiques (notamment la règle de Sarrus).
- Si les lignes ou les colonnes forment une famille liée, conclure que le déterminant est nul.
- Si la matrice A est triangulaire, faire le produit des coefficients diagonaux.
- Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes pour se ramener à une matrice triangulaire.
- Développer selon une ligne ou une colonne après avoir fait apparaitre le plus de zéros possibles sur cette ligne ou colonne.

Méthode – Calcul d'un déterminant (plus complexe)

- Pour calculer un déterminant sous forme factorisée, il faut privilégier le développement selon une ligne ou colonne (en s'assurant qu'il ne reste qu'un terme non nul dans cette ligne ou cette colonne).
- Pour calculer un déterminant de taille n, on peut faire des opérations élémentaires et des développements selon une ligne ou colonne pour faire apparaitre une relation de récurrence.